

เอกสารประกอบการเรียนรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 4

เรื่องความน่าจะเป็น

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

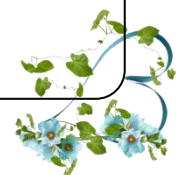
เล่มที่ 2

แฟกทอเรียล

นางสาวปิยวรรณ กอวโบลัมภ์
ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะ ครูชำนาญการ
โรงเรียนบ้านไร่วิทยา อำเภอบ้านไร่ จังหวัดอุทัยธานี
สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 42

ชื่อ-สกุล

ชั้น เลขที่



แบบทดสอบก่อนเรียน

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 4 (ค32204)
เรื่อง แฟกทอเรียล

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

คำชี้แจง แบบทดสอบชุดนี้มีทั้งหมด 10 ข้อ ใช้เวลา 15 นาที

คำสั่ง ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย ✕ ลงในช่องตัวเลือกในกระดาษคำตอบที่เห็นว่าถูกต้องที่สุด
เพียงคำตอบเดียว

1. ค่าของ $(5!)^2$ เท่ากับข้อใด

- | | |
|--------------|------------|
| ก. 25 | ข. 1,440 |
| ค. 14,400 | ง. 144,000 |
| จ. 1,440,000 | |

2. ค่าของ $7!$ เท่ากับข้อใด

- | | |
|----------|--------|
| ก. 12 | ข. 24 |
| ค. 120 | ง. 720 |
| จ. 5,040 | |

3. ค่าของ $3!6!$ เท่ากับข้อใด

- | | |
|----------|----------|
| ก. 1,320 | ข. 2,320 |
| ค. 3,320 | ง. 4,320 |
| จ. 5,320 | |

8. ค่าของ $\frac{(n+2)(n+1)!}{(n!)^2}$ เท่ากับเท่าใด

ก. $(n+2)(n+1)^2$

ข. $(n+2)(n+1)n^2$

ค. $n^2(n-1)(n-2)$

ง. $(n+3)(n+2)(n+1)n^2$

จ. $n^2(n-1)(n-2)(n-3)$

9. ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. $\frac{8!}{5!3!} = 12$

ข. $\frac{20!}{3!18!} = 70$

ค. $\frac{8!}{(4!)^2} = 70$

ง. $\frac{9!}{1!2!6!} = 1,260$

จ. $\frac{18!}{10!8!} = 720$

10. ถ้า $\frac{n!}{(n-8)8!} = \frac{n!}{(n-6)6!}$ แล้วค่าของ n เท่ากับข้อใด

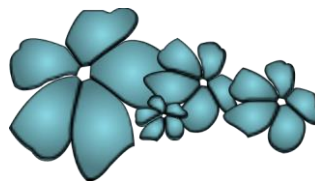
ก. 9

ข. 10

ค. 11

ง. 12

จ. 14



กระดานคำตอบ แบบทดสอบก่อนเรียน
เรื่อง แฟกทอเรียล

ข้อที่	ก	ข	ค	ง	จ
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					



แฟกทอเรียล

แฟกทอเรียล เป็นสัญลักษณ์การเขียนแทนผลคูณของจำนวนเต็มบวก โดยที่ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว เขียน $n!$ อ่านว่า เอ็นแฟกทอเรียล ซึ่ง $n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$

เอกสารประกอบการเรียนรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 4 เรื่องความน่าจะเป็น ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่มที่ 2 แฟกทอเรียล นี้ แบ่งเป็น 2 ตอน ประกอบด้วย

ตอนที่ 1 แฟกทอเรียล

ตอนที่ 2 สมการแฟกทอเรียล



มาศึกษาการเขียนสัญลักษณ์แทนการคูณกัน
ของจำนวนเต็มบวก ที่เรียกว่า
แฟกทอเรียล จาก ตอนที่ 1 แฟกทอเรียล
กันได้แล้วค่ะ



ตอนที่ 1
แฟกทอเรียล



ตอนที่ 1



แฟกทอเรียล

บทนิยาม ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก แฟกทอเรียล n (factorial) คือ ผลคูณของจำนวนเต็มบวก ตั้งแต่ 1 ถึง n และ เขียนแทนด้วย $n!$

ตัวอย่าง

$$1! = 1$$

$$2! = 2 \times 1$$

$$3! = 3 \times 2 \times 1$$

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

$$(n - 1)! = (n - 1) \times (n - 2) \times (n - 3) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

$$(n - 2)! = (n - 2) \times (n - 3) \times (n - 4) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

$$(n + 1)! = (n + 1) \times n \times (n - 1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

$$(n + 2)! = (n + 2) \times (n + 1) \times n \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

$$(2n + 1)! = (2n + 1) \times 2n \times (2n - 1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

และ การเขียน $n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$

มีความหมายเดียวกับ $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n - 2) \times (n - 1) \times n$



การเขียนจำนวนในรูปแฟกทอเรียล เพื่อแสดงการคูณกันของจำนวนเต็มบวก สามารถเขียนได้หลายรูปแบบในการแสดงความหมายของ $n!$ เช่น

เนื่องจาก $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ และ $2! = 2 \times 1$

ดังนั้น $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2!$

หรือ $5! = 5 \times 4 \times 3!$ เพราะ $3! = 3 \times 2 \times 1$

หรือ $5! = 5 \times 4!$ เพราะ $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$

นั่นคือ สามารถเขียน $n!$ ให้อยู่ในรูปของแฟกทอเรียลของจำนวนเต็มบวกใด ๆ ที่มีค่าน้อยกว่า n ได้ดังนี้

จาก $n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times (n - 3) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$

หรือ $= n \times (n - 1) \times (n - 2) \times (n - 3)!$

หรือ $= n \times (n - 1) \times (n - 2)!$

⋮

หรือ $= n \times (n - 1)!$

เนื่องจากการเขียนจำนวนในรูปแฟกทอเรียล สามารถเขียนได้เฉพาะความสัมพันธ์ของจำนวนเต็มบวกเท่านั้น ดังนั้น จำนวนเต็มบวกใด ๆ จะสามารถเขียนแสดงได้ด้วยการคูณกันของจำนวนเต็มบวกได้หลายรูปแบบ เช่น จะเขียนแสดงความสัมพันธ์ของ 10 ในรูปแฟกทอเรียลได้เป็น

$$10 = \frac{120}{12} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{6 \times 2} = \frac{5!}{3 \times 2 \times 2} = \frac{5!}{3!2!} \quad \text{หรือ}$$

$$10 = \frac{10 \times 9!}{9!} \quad \text{ก็ได้}$$

หรือจะสามารถเขียน 120 ในรูปแฟกทอเรียลได้เป็น

$$120 = 5! \quad \text{หรือ} \quad 120 = \frac{6!}{3!} \quad \text{ได้เช่นกัน}$$

นักเรียนลองหาความสัมพันธ์
ของจำนวนอื่น ๆ นะคะ





แฟกทอเรียลศูนย์

จากบทนิยามของแฟกทอเรียล n กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะสามารถแสดงความสัมพันธ์เพื่อหา $0!$ ได้ โดยการกำหนด n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ ได้ดังนี้

$$0! = ?$$

จากบทนิยาม n เป็นจำนวนเต็มบวก และ 1 เป็นจำนวนเต็มบวก กำหนดให้ $n = 1$

พิสูจน์	เนื่องจาก	$n!$	$=$	$n \times (n - 1) \times (n - 2) \times (n - 3) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$
			$=$	$n \times (n - 1)!$
	ถ้า	n	$=$	1
	จะได้	$1!$	$=$	$1 \times (1 - 1)!$
			$=$	$1 \times (0)!$
			$=$	$0!$ (1 เป็นเอกลักษณ์การคูณ)
	ดังนั้น	$1!$	$=$	$0!$
	และเนื่องจาก	$1!$	$=$	1
	ดังนั้น	$0!$	$=$	1

เราลองกำหนด n เป็นจำนวนเต็มบวกอื่น ๆ เช่น 2 หรือ 3 การพิสูจน์ $0!$ จะเท่ากับ 0 หรือไม่ ลองไปทำกิจกรรม $0!$ กันนะคะ



เรามาเรียนรู้การเขียนจำนวนในรูปแฟกทอเรียล
จากตัวอย่างต่อไปนี้ได้เลยนะคะ



ตัวอย่างที่ 2.1

จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ในรูปการกระจายของผลคูณของจำนวนเต็มบวก
ต่อไปอีก 5 พจน์

- | | |
|----------------|----------------|
| 1. $8!$ | 2. $20!$ |
| 3. $(n + 5)!$ | 4. $(n - 5)!$ |
| 5. $(2n + 4)!$ | 6. $(2n - 1)!$ |

วิธีทำ

- | | | |
|----------------|---|---|
| 1. $8!$ | = | $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!$ |
| 2. $20!$ | = | $20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16!$ |
| 3. $(n + 5)!$ | = | $(n + 5)(n + 4)(n + 3)(n + 2)(n + 1)!$ |
| 4. $(n - 5)!$ | = | $(n - 5)(n - 6)(n - 7)(n - 8)(n - 9)!$ |
| 5. $(2n + 4)!$ | = | $(2n + 4)(2n + 3)(2n + 2)(2n + 1)(2n)!$ |
| 6. $(2n - 1)!$ | = | $(2n - 1)(2n - 2)(2n - 3)(2n - 4)(2n - 5)!$ |



ตัวอย่างที่ 2.2

จงหาค่าของจำนวนต่อไปนี้

1. $6!$

2. $\frac{7!}{5!3!}$

3. $\frac{10!}{3!7!}$

4. $\frac{12!}{(12-3)!3!}$

5. $\frac{9!}{(9-9)!0!}$

6. $\frac{20!}{(20-4)!4!}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 1. \quad 6! &= 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\ &= 720 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \frac{7!}{5!3!} &= \frac{7 \times 6 \times 5! \times 1}{5! \times 3 \times 2 \times 1} \\ &= \frac{7 \times 6}{3 \times 2} \\ &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad \frac{10!}{3!7!} &= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3!7!} \\ &= \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} \\ &= \frac{720}{6} \\ &= 120 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 4. \quad \frac{12!}{(12-3)!3!} &= \frac{12!}{9!3!} \\
 &= \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2} \\
 &= \frac{1,320}{6} \\
 &= 220
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5. \quad \frac{9!}{(9-9)!0!} &= \frac{9!}{0!0!} \\
 &= \frac{9!}{1 \times 1} \\
 &= 9!
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6. \quad \frac{20!}{(20-4)!4!} &= \frac{20!}{16!4!} \\
 &= \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16!}{16! \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} \\
 &= \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \\
 &= 4,845
 \end{aligned}$$



ตัวอย่างที่ 2.3

จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ในรูปแฟกทอเรียล

1. $15 \times 14 \times 13 \times 12$

2. $n^2 - 5n + 6$

3. $(2n + 2)(2n + 1)(2n)$

4. $n(n - 1)(n - 2)(n - 3)$

วิธีทำ

$$1. \quad 15 \times 14 \times 13 \times 12 = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11!}{11!}$$

$$= \frac{15!}{11!}$$

$$2. \quad n^2 - 5n + 6 = (n - 2)(n - 3)$$

$$= \frac{(n - 2)(n - 3)(n - 4)!}{(n - 4)!}$$

$$= \frac{(n - 2)!}{(n - 4)!}$$

$$3. \quad (2n + 2)(2n + 1)(2n) = \frac{(2n + 2)(2n + 1)(2n)(2n - 1)!}{(2n - 1)!}$$

$$= \frac{(2n + 2)!}{(2n - 1)!}$$

$$4. \quad n(n - 1)(n - 2)(n - 3) = \frac{n(n - 1)(n - 2)(n - 3)(n - 4)!}{(n - 4)!}$$

$$= \frac{n!}{(n - 4)!}$$



ตัวอย่างที่ 2.4

จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ในรูปที่ไม่มีแฟกทอเรียล

$$1. \frac{(n-1)(n+2)!}{n!(n-2)!}$$

$$2. \frac{n!(n+2)!}{(n-1)!(n+1)!}$$

$$3. \frac{(n-2)!}{(n+1)!}$$

$$4. \frac{(n+1)!(n+2)!}{(n+3)!}$$

วิธีทำ

$$1. \frac{(n-1)(n+2)!}{n!(n-2)!} = \frac{(n-1)(n-2)!(n+2)(n+1)n!}{n!(n-2)!}$$

$$\dots\dots = (n-1)(n+2)(n+1)$$

$$2. \frac{n!(n+2)!}{(n-1)!(n+1)!} = \frac{n(n-1)!(n+2)(n+1)!}{(n-1)!(n+1)!}$$

$$= n(n+2)$$

$$3. \frac{(n-2)!}{(n+1)!} = \frac{(n-2)!}{(n+1)(n)(n-1)(n-2)!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)(n)(n-1)}$$

$$= \frac{1}{n(n^2-1)}$$

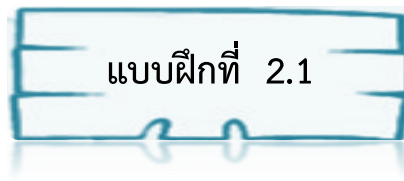
$$4. \frac{(n+1)!(n+2)!}{(n+3)!} = \frac{(n+1)!(n+2)!}{(n+3)(n+2)!}$$

$$= \frac{n+1}{n+3}$$



มาทดสอบความเข้าใจในการเขียนสัญลักษณ์
ของการคูณกันของจำนวนเต็มบวก ที่เรียกว่า
แฟกทอเรียล จาก แบบฝึกที่ 2.1
กันได้เลยนะคะ





- จุดประสงค์การเรียนรู้ :
1. แสดงความสัมพันธ์ของการคูณจำนวนนับในรูปแฟกทอเรียลได้
 2. นำความรู้เรื่องแฟกทอเรียล n ไปใช้แก้ปัญหาได้

คำสั่ง จงแสดงวิธีทำประกอบการหาคำตอบ ทุกข้อ

1. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ในรูปการกระจายของผลคูณของจำนวนเต็มบวกต่อไปอีก 5 พจน์

ตัวอย่าง

$$18! = 18 \times 17 \times 16 \times 15 \times 14!$$

$$(n + 3)! = (n + 3)(n + 2)(n + 1)(n)(n - 1)!$$

1.1 $22!$ =

1.2 $(n + 6)!$ =

1.3 $(3n + 2)!$ =

1.4 $(n - 7)!$ =

1.5 $(4n + 1)!$ =



2. จงหาคำตอบของจำนวนต่อไปนี้

ตัวอย่าง $2!5! = (2 \times 1)(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) = 2 \times 120 = 240$
 $\frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 6 \times 5 \times 4 = 120$
 $\frac{n!}{(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = n(n-1)(n-2) = n^3 - 3n^2 + 2n$

2.1 $4!6! = \dots\dots\dots$

2.2 $\frac{8!}{5!} = \dots\dots\dots$

2.3 $\frac{n!}{(n-5)!} = \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$

2.4 $\frac{(n+3)!}{(n-2)!} = \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$

2.5 $\frac{n!}{(n-3)!3!} = \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$



3. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ในรูปแฟกทอเรียล

$$\begin{aligned} \text{ตัวอย่าง} \quad 9 \times 8 \times 7 &= \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!} = \frac{9!}{6!} \\ (n + 4)(n + 3) &= \frac{(n + 4)(n + 3)(n + 2)!}{(n + 2)!} = \frac{(n + 4)!}{(n + 2)!} \end{aligned}$$

3.1 $22 \times 21 \times 20 \times 19 = \dots\dots\dots$

3.2 $(n + 1)(n)(n - 1) = \dots\dots\dots$

3.3 $(n + 3)(n + 2)(n + 1) = \dots\dots\dots$

3.4 $2n(2n - 1)(2n - 2) = \dots\dots\dots$

3.5 $n(n - 1)(n - 2) \cdots (n - 10) = \dots\dots\dots$

4. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ ให้อยู่ในรูปที่ไม่มีแฟกทอเรียล

$$\begin{aligned} \text{ตัวอย่าง} \quad \frac{2!5!5!}{6!6!} \\ \text{วิธีทำ} \quad \frac{2!5!5!}{6!6!} &= \frac{(2 \times 1) \times 5!5!}{(6 \times 5!)(6 \times 5!)} \\ &= \frac{2}{6 \times 6} \\ &= \frac{1}{18} \\ \frac{(n + 3)!}{n!} \\ \text{วิธีทำ} \quad \frac{(n + 3)!}{n!} &= \frac{(n + 3)(n + 2)(n + 1)n!}{n!} \\ &= (n + 3)(n + 2)(n + 1) \\ &= n^3 + 6n^2 + 11n + 6 \end{aligned}$$



$$4.1 \frac{7!}{11!}$$

วิธีทำ

.....

.....

.....

$$4.2 \frac{10!}{5!3!2!}$$

วิธีทำ

.....

.....

.....

$$4.3 \frac{n!}{(n-3)!}$$

วิธีทำ

.....

.....

.....

$$4.4 \frac{(n+1)!}{(n-1)!}$$

วิธีทำ

.....

.....

.....

$$4.5 \frac{(n-1)!(n+2)!}{n!(n-2)!}$$

วิธีทำ

.....

.....

.....



นอกจากการเขียนสัญลักษณ์แทนการคูณกันของจำนวนเต็มบวก
ในรูปแฟกทอเรียลแล้ว เราสามารถสร้างสมการในรูปแฟกทอเรียล
และแก้สมการได้



ได้เวลาเรียนรู้วิธีการแก้สมการในรูปแฟกทอเรียล
จากตอนที่ 2 สมการแฟกทอเรียล
กันได้แล้วค่ะ



ตอนที่ 2
สมการแฟกทอเรียล



ตอนที่ 2

สมการแฟกทอเรียล

เมื่อหาค่าแฟกทอเรียล และเขียนจำนวนในรูปแฟกทอเรียลในรูปการคูณกันของจำนวนเต็มบวกได้แล้ว เราสามารถนำความรู้ที่ได้ไปแก้สมการ ที่อยู่ในรูปแฟกทอเรียลได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2.5

จงแสดงวิธีการหาค่า n จากสมการ $\frac{n!}{(n-3)!} = 720$

วิธีทำ

$$\frac{n!}{(n-3)!} = 720$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = 720$$

$$n(n-1)(n-2) = 10 \times 9 \times 8$$

$$n(n-1)(n-2) = 10(10-1)(10-2)$$

ดังนั้น $n = 10$

ตัวอย่างที่ 2.6

จงแสดงวิธีการหาค่า n จากสมการ $\frac{n!}{(n-2)!} = 6$

วิธีทำ

$$\frac{n!}{(n-2)!} = 6$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 6$$

$$n(n-1) = 3 \times 2$$

ดังนั้น $n = 3$



ตัวอย่างที่ 2.7

จงแสดงวิธีการหาค่า n จากสมการ $\frac{(n+2)!}{n!} = 30$

วิธีทำ

$$\frac{(n+2)!}{n!} = 30$$

$$\frac{(n+2)(n+1)n!}{n!} = 30$$

$$(n+2)(n+1) = 30$$

$$(n+2)(n+1) = 6 \times 5$$

แสดงว่า $n+2 = 6$ และ $n+1 = 5$

ดังนั้น $n = 4$

ตัวอย่างที่ 2.8

จงแสดงวิธีการหาค่า n จากสมการ $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 1,640$

วิธีทำ

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 1,640$$

$$\frac{(n+1)(n)(n-1)!}{(n-1)!} = 1,640$$

$$(n+1)n = 1,640$$

$$(n+1)n = 41 \times 40$$

$$n+1 = 41$$

ดังนั้น $n = 40$



ตัวอย่างที่ 2.9

จงแสดงวิธีการหาค่า n จากสมการ $\frac{(n-1)!}{(n-3)!} = 20$

วิธีทำ

$$\frac{(n-1)!}{(n-3)!} = 20$$

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = 20$$

$$(n-1)(n-2) = 5 \times 4$$

จะได้ $n-1 = 5$ หรือ $n-2 = 4$

ดังนั้น $n = 6$

ตัวอย่างที่ 2.10

จงแสดงวิธีการหาค่า n จากสมการ $\frac{8!n!}{(n-10)!} = \frac{10!n!}{(n-8)!}$

วิธีทำ

$$\frac{8!n!}{(n-10)!} = \frac{10!n!}{(n-8)!}$$

$$\frac{(n-8)!}{(n-10)!} = \frac{10!}{8!}$$

$$\frac{(n-8)(n-9)(n-10)!}{(n-10)!} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{8!}$$

$$(n-8)(n-9) = 10 \times 9$$

จะได้ $n-8 = 10$ หรือ $n-9 = 9$

ดังนั้น $n = 18$



หากนักเรียนมีข้อสงสัย ให้สอบถามครูผู้สอน
ได้ที่ไหนคะ



มาฝึกแก้สมการในรูปแฟกทอเรียล
จากแบบฝึกที่ 2.2 กันได้เลยนะคะ



แบบฝึกที่ 2.2

จุดประสงค์การเรียนรู้ : นำความรู้เรื่องแฟกทอเรียล n ไปใช้ในการแก้ปัญหาค่า

คำสั่ง พิจารณาสมการแฟกทอเรียลต่อไปนี้ แล้วแสดงวิธีการหาค่า n

ตัวอย่าง จงหาค่า n จากสมการ $\frac{n!}{(n-4)!} = 840$

วิธีทำ
$$\frac{n!}{(n-4)!} = 840$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-4)!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3) = 7 \times 6 \times 5 \times 4$$
 ดังนั้น $n = 7$

1. $\frac{n!}{(n-3)!} = 60$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

2. $\frac{n!}{(n-3)!} = \frac{63(n-1)!}{(n-2)!}$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....



3. $\frac{(n + 2)!}{(n + 1)!} = 800$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. $\frac{n!}{(n - 2)!} = \frac{(n + 1)!}{(n - 3)!}$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



$$5. \quad 2 \left[\frac{(n+4)!}{(n-2)!} \right] = \frac{(n+5)!}{(n-1)!}$$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



สรุปบทเรียน

บทนิยาม ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก แฟกทอเรียล n (factorial) คือ ผลคูณของจำนวนเต็มบวก ตั้งแต่ 1 ถึง n และ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $n!$

สรุปการดำเนินการในรูปแฟกทอเรียล

1. สามารถเขียน $n!$ ให้อยู่ในรูปของแฟกทอเรียลของจำนวนใด ๆ ที่มีค่าน้อยกว่า n ได้ ดังนี้

$$\text{จาก } n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times (n - 3) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

$$\text{หรือ } = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times (n - 3)!$$

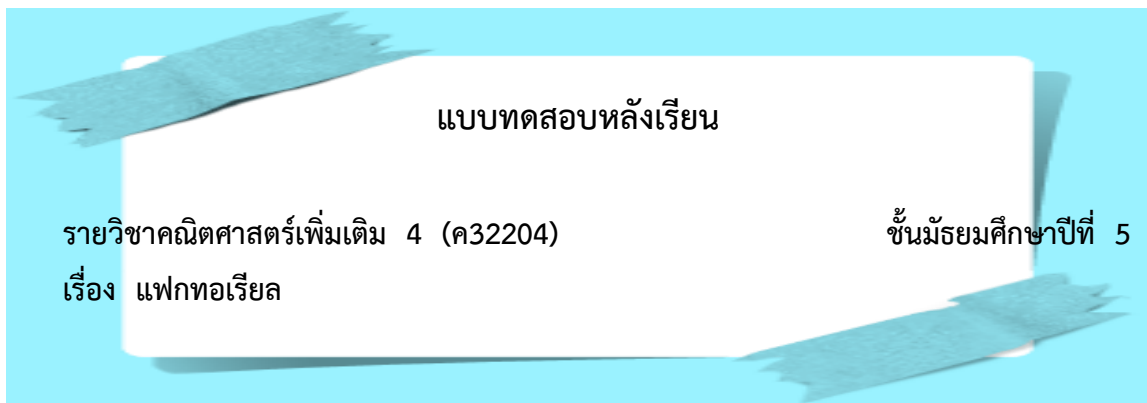
$$\text{หรือ } = n \times (n - 1) \times (n - 2)!$$

$$\vdots$$

$$\text{หรือ } = n \times (n - 1)!$$

2. สามารถอธิบายได้ว่า $0! = 1$
3. สามารถเขียนสมการในรูปแฟกทอเรียล และแก้สมการได้





คำชี้แจง แบบทดสอบชุดนี้มีทั้งหมด 10 ข้อ ใช้เวลา 15 นาที

คำสั่ง ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย ✕ ลงในช่องตัวเลือกในกระดาษคำตอบที่เห็นว่าถูกต้องที่สุด
เพียงคำตอบเดียว

1. ค่าของ $7!$ เท่ากับข้อใด

- | | |
|----------|--------|
| ก. 12 | ข. 24 |
| ค. 120 | ง. 720 |
| จ. 5,040 | |

2. ค่าของ $3!6!$ เท่ากับข้อใด

- | | |
|----------|----------|
| ก. 1,320 | ข. 2,320 |
| ค. 3,320 | ง. 4,320 |
| จ. 5,320 | |

3. ค่าของ $(5!)^2$ เท่ากับข้อใด

- | | |
|--------------|------------|
| ก. 25 | ข. 1,440 |
| ค. 14,400 | ง. 144,000 |
| จ. 1,440,000 | |

4. $50 \times 51 \times 52 \times \dots \times 80$ ในรูปแฟกทอเรียลได้เท่ากับข้อใด

ก. $\frac{80!}{50!}$

ข. $\frac{80!}{49!}$

ค. $\frac{81!}{40!}$

ง. $\frac{81!}{49!}$

จ. $\frac{50!80!}{49!}$

5. ค่าของ $\frac{(n+3)!}{(n+1)!}$ เท่ากับเท่าใด

ก. $(n+2)$

ข. $(n+3)(n+2)$

ค. $(n+3)(n+1)$

ง. $(n+1)(n+2)$

จ. $n(n+3)(n+2)$

6. ค่าของ $\frac{(n+2)!(n+1)!}{(n!)^2}$ เท่ากับข้อใด

ก. $(n+2)(n+1)^2$

ข. $(n+2)(n+1)n^2$

ค. $n^2(n-1)(n-2)$

ง. $(n+3)(n+2)(n+1)n^2$

จ. $n^2(n-1)(n-2)(n-3)$

7. ค่าของ n เมื่อ $\frac{n!}{(n-2)!} = 1,190$ เท่ากับข้อใด

ก. 35

ข. 36

ค. 40

ง. 45

จ. 60

แบบบันทึกคะแนนแบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน
เล่ม 2 แฟกทอเรียล

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....

รายการ	คะแนนเต็ม	คะแนนที่ได้	ความก้าวหน้า	คิดเป็นร้อยละ
การทดสอบก่อนเรียน	10			
การทดสอบหลังเรียน	10			



แบบบันทึกคะแนนความก้าวหน้าของแบบฝึกหัดระหว่างเรียน

เล่ม 2 แฟกทอเรียล

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....

แบบฝึกหัดที่	คะแนนเต็ม	คะแนนที่ได้	คิดเป็นร้อยละ	ผ่านเกณฑ์*	ไม่ผ่านเกณฑ์**
2.1	20				
2.2	20				
รวมทั้งหมด	40				
เฉลี่ย					
คิดเป็นร้อยละ					

- * ผ่านเกณฑ์ หมายความว่า ผู้เรียนได้คะแนนร้อยละ 75 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม
- ** ไม่ผ่านเกณฑ์ หมายความว่า ผู้เรียนได้คะแนนน้อยกว่าร้อยละ 75 ของคะแนนเต็ม



บรรณานุกรม

- กนกวลี อุษณกรกุล เรณู สุทธิวารีย์ และรณชัย มาเจริญทรัพย์. **เตรียมสอบ PET 1 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม เล่ม 4 ม.4-6.** กรุงเทพฯ: ภูมิบัณฑิตการพิมพ์.
- กมล เอกไทยเจริญ. **คณิตศาสตร์ ม.6 เล่ม 6 ค016.** กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิง.
- _____. (2557). **เทคนิคการทำโจทย์ข้อสอบ คณิตศาสตร์ ม.5 เทอม 2.** กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิง.
- คณิต มงคลพิทักษ์สุข. **HI-SPEED MATHS FOR PAT1 & EXAM.** กรุงเทพฯ: SCIENCE CENTER.
- จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. (2556). **คู่มือประกอบการเรียนรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม.4 – 6 เล่ม 4.** กรุงเทพฯ: พ.ศ. พัฒนา จำกัด.
- ฉวีวรรณ เสวตมาลย์ และคณะ. (2545). **กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ช่วงชั้นที่ 4 (ม.4-6) เล่ม 3.** พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ: ประสารมิตร.
- ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. (2555). **1001 TESTS IN MATHS 3.** กรุงเทพฯ: แม็ค.
- พิพัฒน์พงศ์ ศรีวิศร. (2555). **คู่มือคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม.4 – 6 เล่ม 4.** กรุงเทพฯ: เดอร์บุคส์.
- ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง. (2542). **แนวคิดหลักมูลทางคณิตศาสตร์ 1.** 500 เล่ม. พิมพ์ครั้งที่ 4. กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยรามคำแหง.
- เลิศ สิทธิโกศล. (2555). **Math Review คณิตศาสตร์ ม.4 – 6 เล่ม 4 (เพิ่มเติม).** กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิง.
- สถาบันส่งเสริมการสอนการศึกษาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.). (2544). **เอกสารเสริมความรู้วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง คอมบินาทอริก.** 3,000 เล่ม. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ: สำนักพัฒนาธุรกิจ.
- _____. (2553). **หนังสือเรียนรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 เล่ม 4.** 350,000 เล่ม. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ: สกสค. ลาดพร้าว.
- _____. (2553). **คู่มือครูรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 เล่ม 4.** 5,000 เล่ม. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ: สกสค. ลาดพร้าว.
- สมพร สุนันทน์โอภาส. (2539). **คณิตศาสตร์ทางด้านวิธีจัดหมู่เบื้องต้น.** 1,000 เล่ม. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

บรรณานุกรม (ต่อ)

สมัย เหล่าวานิชย์. **คู่มือคณิตศาสตร์ ม.6 เล่ม 6**. กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง.

สมัย เหล่าวานิชย์ และพัชพรรณ เหล่าวานิชย์. **คณิตศาสตร์4 พื้นฐาน + เพิ่มเติม**. กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง.

สุเทพ จันทร์สมบัติ และสุเทพ ทองอยู่. **คู่มือเตรียมสอบคณิตศาสตร์ 6 ม.6 เล่ม 6 ค016**. กรุงเทพฯ: ภูมิบัณฑิต.



ภาคผนวก

เกณฑ์การให้คะแนน

เกณฑ์การให้คะแนนแบบทดสอบก่อนเรียนและแบบทดสอบหลังเรียน

แบบทดสอบละ 10 ข้อ ให้คะแนนข้อละ 1 คะแนน ตามรายละเอียด ดังนี้

คะแนน	รายละเอียด
1	หมายถึง เลือกข้อคำตอบได้ถูกต้อง
0	หมายถึง เลือกข้อคำตอบไม่ถูกต้อง

เกณฑ์การให้คะแนนแบบฝึกที่ 2.1

จำนวน 4 ข้อ แต่ละข้อมี 5 ข้อย่อย ให้คะแนนข้อย่อยละ 1 คะแนน ตามรายละเอียด ดังนี้

คะแนน	รายละเอียด
1	หมายถึง แสดงวิธีทำ และคำตอบถูกต้อง
0	หมายถึง แสดงวิธีทำ และคำตอบไม่ถูกต้อง

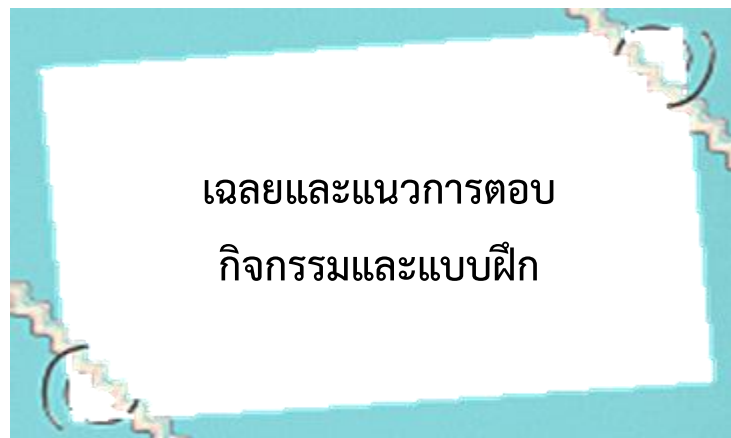
รวมคะแนนเต็ม 20 คะแนน

เกณฑ์การให้คะแนนแบบฝึกที่ 2.2

แบบฝึกละ 5 ข้อ ให้คะแนนข้อละ 4 คะแนน ตามรายละเอียด ดังนี้

คะแนน	รายละเอียด
3	หมายถึง คำตอบถูกต้อง แสดงการแก้สมการถูกต้อง แนวคิดชัดเจน
2	หมายถึง คำตอบถูกต้อง แสดงการแก้สมการมีข้อผิดพลาดเล็กน้อย
1	หมายถึง แสดงวิธีการแก้สมการเล็กน้อย การคำนวณผิดพลาด
0	หมายถึง ไม่แสดงวิธีคิด ไม่ได้คำตอบ หรือตอบไม่ถูก

รวมคะแนนเต็ม 20 คะแนน



เฉลยและแนวการตอบกัการรม 0!

จงแสดงการพิสูจน์ว่า $0! = 1$ เมื่อกำหนดให้ $n = 2$ และ $n = 3$

เมื่อกำหนดให้ $n = 2$

พิสูจน์	เนื่องจาก	$n!$	=	$n(n - 1)(n - 2)(n - 3) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$
			=	$n(n - 1)(n - 2)!$
	ถ้า	n	=	2
	จะได้	$2!$	=	$2(2 - 1)(2 - 2)!$
		2	=	$2 \times 1 \times 0!$
		2	=	$2 \times 0!$
		$\frac{2}{2}$	=	$0!$
		1	=	$0!$
	ดังนั้น	$0!$	=	1

เมื่อกำหนดให้ $n = 3$

พิสูจน์	เนื่องจาก	$n!$	=	$n(n - 1)(n - 2)(n - 3) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$
			=	$n(n - 1)(n - 2)(n - 3)!$
	ถ้า	n	=	3
	จะได้	$3!$	=	$3(3 - 1)(3 - 3)!$
		6	=	$3 \times 2 \times 0!$
		6	=	$6 \times 0!$
		$\frac{6}{6}$	=	$0!$
		1	=	$0!$
	ดังนั้น	$0!$	=	1

เฉลยและแนวการตอบแบบฝึกที่ 2.1

1. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ในรูปการกระจายของผลคูณของจำนวนเต็มบวกต่อไปอีก 5 พจน์

$$1.1 \quad 22! = 22 \times 21 \times 20 \times 19 \times 18!$$

$$1.2 \quad (n + 6)! = (n+6) \times (n+5) \times (n+4) \times (n+3) \times (n+2)!$$

$$1.3 \quad (3n + 2)! = (3n + 2)(3n + 1)(3n)(3n - 1)(3n - 2)!$$

$$1.4 \quad (n - 7)! = (n - 7)(n - 8)(n - 9)(n - 10)(n - 11)!$$

$$1.5 \quad (4n + 1)! = (4n + 1)(4n)(4n - 1)(4n - 2)(4n - 3)!$$

2. จงหาคำตอบของจำนวนต่อไปนี้

$$2.1 \quad 4!6! = (4 \times 3 \times 2 \times 1)(6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) = 24 \times 720 = 17,280$$

$$2.2 \quad \frac{8!0!}{5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5! \times 1}{5!} = 336$$

$$2.3 \quad \frac{n!}{(n - 5)!} = \frac{n(n - 1)(n - 2)(n - 3)(n - 4)(n - 5)!}{(n - 5)!}$$

$$= n(n - 1)(n - 2)(n - 3)(n - 4)$$

$$= n^5 - 10n^4 + 35n^3 - 60n^2 + 24n$$

$$2.4 \quad \frac{(n + 3)!}{(n - 2)!} = \frac{(n + 3)(n + 2)(n + 1)(n)(n - 1)(n - 2)!}{(n - 2)!}$$

$$= (n + 3)(n + 2)(n + 1)(n)(n - 1)$$

$$= n^5 + 5n^4 + 5n^3 - 5n^2 - 6n$$

$$2.5 \quad \frac{n!}{(n - 3)!3!} = \frac{n(n - 1)(n - 2)(n - 3)!}{(n - 3)!3!}$$

$$= \frac{n(n - 1)(n - 2)}{3!}$$

$$= \frac{n^3 - 3n^2 + 2n}{6}$$

3. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ในรูปแฟกทอเรียล

$$3.1 \quad 22 \times 21 \times 20 \times 19 = \frac{22 \times 21 \times 20 \times 19 \times 18!}{18!}$$

$$= \frac{22!}{18!}$$

$$3.2 \quad (n + 1)(n)(n - 1) = \frac{(n + 1)(n)(n - 1)(n - 2)!}{(n - 2)!}$$

$$= \frac{(n + 1)!}{(n - 2)!}$$

$$3.3 \quad (n + 3)(n + 2)(n + 1) = \frac{(n + 3)(n + 2)(n + 1)n!}{n!}$$

$$= \frac{(n + 3)!}{n!}$$

$$3.4 \quad 2n(2n - 1)(2n - 2) = \frac{2n(2n - 1)(2n - 2)(2n - 3)!}{(2n - 3)!}$$

$$= \frac{2n!}{(2n - 3)!}$$

$$3.5 \quad n(n - 1)(n - 2) \cdots (n - 10) = \frac{n(n - 1)(n - 2) \cdots (n - 10)(n - 11)!}{(n - 11)!}$$

$$= \frac{n!}{(n - 11)!}$$

4. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ ให้อยู่ในรูปแฟกทอเรียล

$$4.1 \quad \frac{7!}{11!}$$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \frac{7!}{11!} &= \frac{7!}{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7!} \\ &= \frac{1}{11 \times 10 \times 9 \times 8} \\ &= \frac{1}{7,920} \end{aligned}$$

$$4.2 \frac{10!}{5!3!2!}$$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \frac{10!}{5!3!2!} &= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} \\ &= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} \\ &= 2,520 \end{aligned}$$

$$4.3 \frac{n!}{(n-3)!}$$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \frac{n!}{(n-3)!} &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} \\ &= n(n-1)(n-2) \\ &= n^3 - 3n^2 + 2n \end{aligned}$$

$$4.4 \frac{(n+1)!}{(n-1)!}$$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \frac{(n+1)!}{(n-1)!} &= \frac{(n+1)(n)(n-1)!}{(n-1)!} \\ &= (n+1)n \\ &= n^2 + n \end{aligned}$$

$$4.5 \frac{(n-1)(n+2)!}{n!(n-2)!}$$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \frac{(n-1)(n+2)!}{n!(n-2)!} &= \frac{(n-1)(n-2)!(n+2)(n+1)n!}{n!(n-2)!} \\ &= (n-1)(n+2)(n+1) \\ &= n^3 + 2n^2 - n - 2 \end{aligned}$$

เฉลยและแนวการตอบแบบฝึกที่ 2.2

พิจารณาสมการแฟกทอเรียลต่อไปนี้ แล้วแสดงวิธีการหาค่า n

$$1. \frac{n!}{(n-3)!} = 60$$

วิธีทำ

$$\frac{n!}{(n-3)!} = 60$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = 60$$

$$n(n-1)(n-2) = 5 \times 4 \times 3$$

ดังนั้น

$$n = 5$$

$$2. \frac{n!}{(n-3)!} = \frac{63(n-1)!}{(n-2)!}$$

วิธีทำ

$$\frac{n!}{(n-3)!} = \frac{63(n-1)!}{(n-2)!}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = \frac{63(n-1)(n-2)!}{(n-2)!}$$

$$n(n-1)(n-2) = 63 \times (n-1)$$

$$n(n-1)(n-2) = 9 \times (n-1) \times 7$$

ดังนั้น

$$n = 9$$

$$3. \frac{(n+2)!}{(n+1)!} = 800$$

วิธีทำ

$$\frac{(n+2)!}{(n+1)!} = 800$$

$$\frac{(n+2)(n+1)!}{(n+1)!} = 800$$

$$n+2 = 800$$

ดังนั้น

$$n = 798$$

$$4. \frac{10n!}{(n-2)!} = \frac{(n+1)!}{(n-3)!}$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \frac{10n!}{(n-2)!} &= \frac{(n+1)!}{(n-3)!} \\ \frac{10n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} &= \frac{(n+1)(n)(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} \\ 10n(n-1) &= (n+1)(n)(n-1)(n-2) \\ \frac{10n(n-1)}{n(n-1)} &= \frac{(n+1)(n)(n-1)(n-2)}{n(n-1)} \\ 10 &= n^2 - n - 2 \\ 0 &= n^2 - n - 2 - 10 \\ 0 &= n^2 - n - 12 \\ n^2 - n - 12 &= 0 \\ (n+3)(n-4) &= 0 \\ \text{ดังนั้น} \quad n &= 4 \end{aligned}$$

($n \neq -3$ เพราะ n ต้องเป็นจำนวนเต็มบวก)

$$5. 2 \left[\frac{(n+4)!}{(n-2)!} \right] = \frac{(n+5)!}{(n-1)!}$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 2 \left[\frac{(n+4)!}{(n-2)!} \right] &= \frac{(n+5)!}{(n-1)!} \\ 2 \left[\frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)(n)(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} \right] &= \frac{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)(n)(n-1)!}{(n-1)!} \\ 2(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)(n)(n-1) &= (n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n \\ 2(n-1) &= (n+5) \\ 2n-2 &= n+5 \\ 2n-n &= 5+2 \\ \text{ดังนั้น} \quad n &= 7 \end{aligned}$$

เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน
เรื่อง แพกทอเรียล

ข้อที่	ก	ข	ค	ง	จ
1			✗		
2					✗
3				✗	
4		✗			
5	✗				
6		✗			
7	✗				
8	✗				
9			✗		
10					✗

เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน
เรื่อง แพกทอเรียล

ข้อที่	ก	ข	ค	ง	จ
1					✗
2				✗	
3			✗		
4		✗			
5		✗			
6	✗				
7	✗				
8	✗				
9					✗
10			✗		



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

